Grundlagen zur Methodik der Verschneidung stahlbautypischer Körper in einem CAD-System

0 Einführung

Im Bauwesen, insbesondere in Stahlbau, sind alle Bereiche der Projektbearbeitung vom Entwurf über die statische Berechnung bis zur konstruktiven Ausbildung ohne Computereinsatz nicht mehr vorstellbar.

Obwohl viele Konstruktionsprogramme in der Praxis noch mit zwei Dimensionen für den Grundriß und die Ansichtszeichnungen auskommen, ist der heutige Stand der Technik durch die räumliche Modellierung und Darstellung festgelegt.

Die dreidimensionale Erfassung, Speicherung und Verarbeitung der Konstruktionsdaten im Rechner verlangt neben großen Rechenleistungen neue Verfahren für die Behandlung dieser Daten. Diese Tatsache spiegelt sich auch im Stahlbau wieder.

Die vorliegende Arbeit ist der Erarbeitung von Methoden zur Verschneidung stahlbautypischer Körper gewidmet. Hierzu wurden Untersuchungen geführt und ein Verfahren zur rechnerinternen Darstellung ebenflächiger Körper erarbeitet, das im Vergleich zu heute üblichen Verfahren eine Automatisierung und eine wesentliche Reduzierung der Datenmengen ermöglicht.
Außerdem werden Methoden zur Überprüfung der Konsistenz von Körpern und zur Durchführung von Körperverschneidungen entwickelt.

1 Rechnerinteren Darstellung von Stahlbauelementen

Im Stahlbau werden hauptsächlich stabförmige Elemente verwendet, die durch ihre Schwerachse idealisiert und aus einfachen Zusammensetzungen von Ebenen entstanden sind. Die meisten Profile sind standardisiert und haben eine genormte geometrische Struktur. Diese Struktur, die sich auch für nicht genormte Profile darstellen läßt, hat folgende Vorteile für die Generierung der Bauteile im Rechner:

- die Profilachsen besitzen eine eindeutig definierte Darstellung, wie x, y und z Achsen;
- der Grundquerschnitt kann im Regelfalle durch "sweeping" an der Profillängsachse ausgedehnt werden;
- eine Rotation oder Drehung um die Achsen ist leicht realisierbar, weil im Stahlbau die Plazierung der Bauelemente über die Hauptachsen durchgeführt wird.

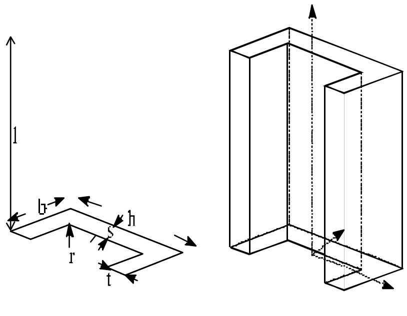


Fig.1. Prinzipielle Darstellung von Stahlbauelementen

Aus den geometrischen Daten der Profile, wie Länge, Breite u.s.w., die für Standardprofile aus einem Katalog entnommen werden können, soll ein entsprechendes Modell erstellt werden, um die Gestalt des Bauteils im Rechner zu realisieren. Aus diesen Parametern wird ein dreidimensionaler Körper durch mathematische Ansätze wie Geradengleichung, Ebenengleichung u.s.w., mit den entsprechenden Informationen erstellt. Die Eckpunkte bilden die primären Informationen, die für die Umrisse des gewünschten Profils bei einer graphischen Darstellung benötigt werden.

Zur graphischen Bearbeitung werden zusätzliche Informationen benötigt, die untereinander zu koordinieren sind, d.h. für ein Profil müssen die geometrischen und topologischen Informationen erstellt werden.

Die geometrischen Informationen beschreiben die Lage und Form von Objekten im Raum, die topologischen die Beziehungen der geometrischen Objekte untereinander.

Die Darstellung von Profilen bildet nur einen ersten Arbeitschritt. Für eine praktische Nutzung müssen die Profile miteinander auf unterschiedliche Art und Weise gekoppelt werden.

Beim Zusammenfügen von Stahlbauprofilen treten sehr häufig mathematische Sonderfälle in der Geometrie und Topologie auf. Ein Beispiel hierfür sind Schnitte durch Eckpunkte oder Körperverschneidungen, bei denen sich Teile durchdringen oder Flächen berühren. Nutzt man für Verschneidungen einfache Boolesche Operationen, können dabei entartetete Körper entstehen, d.h. durch Verschneidungen ergeben sich Restelemente. Dies ist jedoch bei einer praktischen Konstruktion nicht zulässig. Ein weiterer technischer Sonderfall tritt bei der Berücksichtigung einer technischen Toleranz auf, die als Abstand zwischen zwei Profilen definiert wird.

Im Stahlbau werden auch oft zusammengesetzte Profile angewendet. Es handelt sich bei diesen Bauelementen um Körper, die durch Flächenkontakt miteinander verbunden sind. Diese zusammengesetzten Körper stellen aus topologischer Sicht nicht konsistente Körper dar.

2 Modellierungsmethoden und Begriffsbestimmung

Die Darstellung von Körpern kann mit unterschiedlichen Modellen vorgenommen werden. Die wichtigsten und kommerziell am häufigsten angewendeten Modelle sind das CSG- und BRep-Modell [6], [7].
Das CSG-Modell wird als operatives oder Boolesches Modell bezeichnet. Das rechnerinterne Modell des abgebildeten Objektes wird durch die Definition seines Volumengrundkörpers und seiner Basisoperationen auf diesen Körper beschrieben.
Das BRep-Modell bildet eine Volumendatenstruktur, die durch ihre Orientierungen und Begrenzungselemente festgelegt ist. Der Körper wird durch Flächen, die Flächen durch Kanten, die Kanten durch Punkte und die Punkte wiederum mit ihren drei Koordinatenwerten definiert. In diesem Modell existiert eine Hierarchie von Datenelementen, die miteinander verknüpft sind.
Beide Modelle für Körpermanipulationen gelten nur für konsistente Körper. Diese Konsistenz wird durch topologische Definitionen beschrieben [1]. Die wichtigsten Begriffe dabei sind Homöomorphismus und topologische Mannigfaltigkeit.
Ein **Homöomorphismus** ist eine topologische Abbildung. Ein Homöomorphismus des Raumes X auf den Raum Y ist eine eineindeutige Abbildung $f: X \rightarrow Y$, wenn die inverse Abbildung
$f: Y \rightarrow X$ stetig ist.
Eine **topologische Mannigfaltigkeit** der Dimension n nennt man jeden Hausdorf'schen topologischen Raum mit abzählbarer Basis, in dem für jeden Punkt X eine offene Menge im Raum R^n mit homöomorphischer Umgebung existiert [2].

Es sei X eine topologische Mannigfaltigkeit. Unter einem (lokalen) Element auf X versteht man dann eine Abbildung u: $U \rightarrow R^n$,

wobei : $U \in X$: offene Menge

u : Homöomorphismus auf eine Teilmenge im Raum R^n [5].

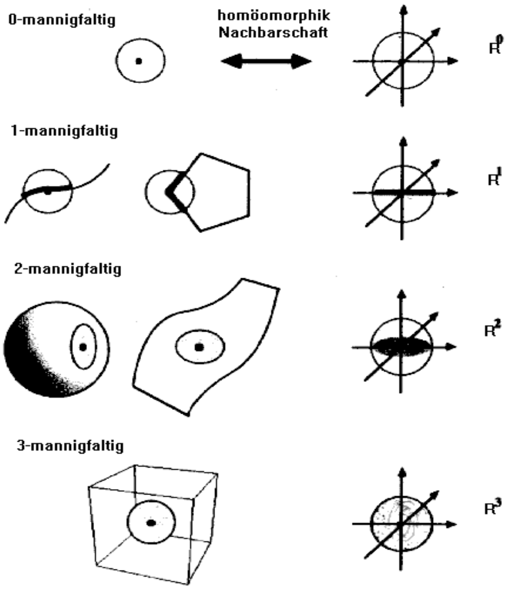


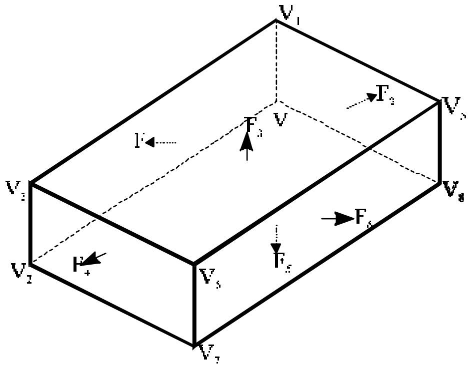
Fig. 2. Typen von Mannigfaltigkeiten [7]

In Fig. 2. wird eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit demonstriert. Wenn das lokale Element z.B. nur einen Punkt hat, dann ist dieser Punkt 0-mannigfaltig.
Ein linienartig zusammenhängendes Element besitzt eine eindimensionale Mannigfaltigkeit und ist homöomorph zur Kreislinie oder Zahlengeraden.
Wenn die Oberfläche eines Körpers in einer Umgebung "flach" und homöomorph zur Kreisscheibe ist, dann ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit gegeben.
Ein dreidimensionaler Körper ist ein Homöomorph zur Kugel.

3 Lösungsansätze

3.1 Inzidenz-Matrix [IM]

Ausgehend von den bisher übliche Darstellungsmodellen wurde eine Vorgehensweise erarbeitet [4], die die Spezifik der Stahlbauproblematik berücksichtigt. Die Basis bildet dabei eine sogenannte Inzidenz-Matrix, die durch die topologischen Elemente, z.B. Ecken ("Vertex") und die geometrischen Elemente wie Normalenvektor der Fläche ("Face") gebildet wird.
Die Ecken belegen die Zeilen, und die Spalten werden durch die Normalen der jeweiligen Flächen beschrieben.
In der [IM] werden die direkten Beziehungen der topologischen und geometrischen Informationen des Körpers abgebildet. Dadurch ist auf einfache Weise die Überprüfung von Mannigfaltigkeiten an den Ecken der Körper möglich.
Als Beispiel soll ein Quader gegeben sein, der durch seine Eckpunkte und Flächen dargestellt wird. Das Modell hat eine BRep ähnliche Struktur, aber eine geringere Komplexität.



	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
F_1	1	1	1	1				
F_2	1			1	1			1
F_3			1	1	1	1		
F_4		1	1			1	1	
F_5	1	1					1	1
F_6					1	1	1	1
$nF(V_i)$	3	3	3	3	3	3	3	3

Fig. 3.1. Quader mit zugehöriger Inzidenz- Matrix

Die Eckpunkte (V) und die Flächen (F) bilden die Inzidenz-Matrix [IM], diese hat damit (V x F) Elemente. Der Wert des Elementes der Inzidenz-Matrix ist 1, falls der Eckpunkt zum Flächenvektor gehört, sonst 0. Die Anzahl der Flächenvektoren, die zu einem Eckpunkt gehören, gibt die Anzahl der Flächen an, zu denen der Eckpunkt eine Beziehung hat. Die Zeile beschreibt die Anzahl der Flächen am jeweiligen Eckpunkt. Diese Beziehung wird für die Überprüfung der Mannigfaltigkeiten in der [IM] benötigt.

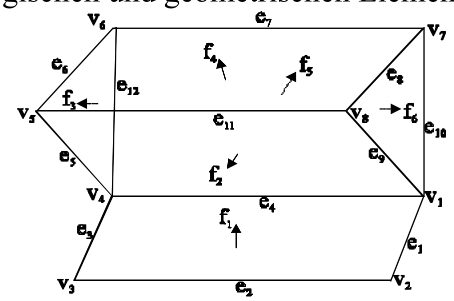
Eine herkömmliche Methode zur Überprüfung der Mannigfaltigkeit basiert auf dem Eulerschen Polyedersatz.
Für Körper, deren Topologie sich durch Facetten-Elemente darstellen läßt, existieren unabhängig von der Form des Körpers bestimmte Beziehungen zwischen Ecken, Kanten und Flächen. Dieser Zusammenhang ist durch die Eulersche Charakteristik definiert.

$$V - E + F = \chi(S)$$

für $\chi(S) = 2$ ergibt sich ein einfacher Polyeder;
für $\chi(S) = L + 2 * (S - D)$ ergibt sich ein erweiterter Polyeder;

wobei: $\chi(S)$: Eulersche Charakteristik V: Anzahl der Ecken (Vertex)
E: Anzahl der Kanten (Edge) F: Anzahl der Flächen (Face)
L: Flächenloch oder Inselfläche (Face-hole) D: Volumendurchbruch oder Geschlecht (Genus).
S: Schale (shell)

Der Eulersatz liefert jedoch keine hinreichenden Aussagen. Für einen Quader ergibt der Eulersatz den gleichen Wert wie für den im Bild 3.2 dargestellten, nicht-mannigfaltigen Körper, d.h. es können keine eindeutigen Zusammenhänge zwischen den jeweiligen topologischen und geometrischen Elementen erzeugt werden.



$V = 8, E = 12, F = 6$
$V - E + F = 2$
$8 - 12 + 6 = 2$

Fig.3.2. Nicht-mannigfaltige Körper

Der Eulersatz gibt uns nur notwendige, aber nicht hinreichende Informationen. Daraus resultiert die Notwendigkeit, die Überprüfung der Mannigfaltigkeit lokal durchzuführen. Diese Überprüfung erfolgt durch die Anwendung des Homöomorphismus.
Stoßen in einem Eckpunkt mindestens drei Flächen zusammen, bilden die Flächen um diese Ecke einen Homöomorph zur offenen Kreisscheibe. Das bedeutet, diese Ecke ist lokal zweidimensional mannigfaltig. Wenn jede Ecke des Körpers homöomorph zur Kreisscheibe ist, dann ist der Körper einfach zweidimensional mannigfaltig oder konsistent.
Dieser Zusammenhang liefert die Grundlage für die folgenden Algorithmen zur Bestimmung der Konsistenz eines Körpers. Im folgenden werden die Schritte des Verfahrens aufgezeigt:

1. Es wird ein beliebiger Eckpunkt gewählt und für diesen werden die angrenzenden Flächen aufgelistet.
2. Aus den Flächen und ihren Eckpunkten wird die lokale Inzidenz-Matrix [LIM] erstellt.
3. Durch einen einfachen Datenvergleich lassen sich daraus Beziehungen von Flächen und Kanten (Anfangs- und Endvertex) finden.
4. Aus den gewonnenen Informationen werden die Winkel extrahiert, die zusammensetzt einen Kreis bilden.

Analog werden alle Eckpunkte untersucht. Damit ist die Konsistenz eines Körpers bestimmbar und es kann eine Körperverschneidung erfolgen.
Um die Datenmenge effektiv verwalten zu können, wird sie noch komprimiert. Dazu wird die Methode der minimalen Inzidenz-Matrix [MIM] verwendet.

	V_1	V_6
F_1	1	
F_2	1	
F_3		1
F_4		1
F_5	1	
F_6		1

Fig. 3.3. Minimale Inzidenz-Matrix des Körpers aus Fig. 3.1

3.2 Minimale Inzidenz-Matrix [MIM]

Die Bildung einer minimalen Inzidenz-Matrix erfolgt durch die Definition sogenannter Common Points (CP), die die Träger der topologischen Informationen ihrer unmittelbaren Umgebung sind. Als CP bietet sich zuerst der Eckpunkt an, an dem sich die größte Anzahl von Flächen trifft.
V_1 ist der erste CP im betrachteten Beispiel. Die umschließenden Flächen stellen Stützebenen dar. Die in diesem CP gespeicherten Stützebenen werden aus der Matrix entfernt, d.h. spaltenweise werden an jedem Eckpunkt die Stützebenen subtrahiert.
Es wird in gleiche Weise ein nächster CP ermittelt, bis alle Elemente der Inzidenz-Matrix erfaßt sind. Damit erreicht man eine deutliche Datenkomprimierung.
Nach der Datenkomprimierung können die topologischen Relationen zwischen zwei Körpern ermittelt werden. Dazu untersucht man die Beziehungen zwischen den CP in allen möglichen Kombinationen.
Diese Beziehungen liefern Kombination der Stützebenen, deren Vektorprodukte bestimmt werden. Nach der Erfassung der topologischen Relationen erfolgen die Berechnungen der Schnittpunkte der zu verschneidenden Körper.

3.3 Gesamtsuchschema (GSS)

Mittels eines Gesamtsuchschemas soll die Anzahl der Durchläufe bei der Suche von Schnittpunkten minimiert werden.
Während des Suchverfahrens müssen nicht alle Fläche des Körpers einzeln untersucht werden, wie das bei herkömmlichen Verfahren nötig ist. Erfolglose Schnittberechnungen werden frühzeitig erkannt.
Die neuen Schnittpunkte vererben die geometrische Informationen, z.B. die Flächennormalen der im Schnitt beteiligten Flächen. Nach Ermittlung aller Schnittpunkte werden die Resultatkörper dargestellt.

4 Praktische Beispiele aus dem Stahlbau

Fig. 4. zeigt typische Beispiele für Körperverschneidungen im Stahlbau. Dabei sind Durchdringung, Flächenkontakt und Entstehung von entarteten Körpern vorhanden. Außerdem kann eine technische Toleranz berücksichtigt werden.
Mit der erarbeiteten Methode erfolgt die Ausklinkung zwischen formgebenden und formnehmenden Profilen automatisch, während bei herkömmlichen Methoden dazu Methodenbanken notwendig sind.

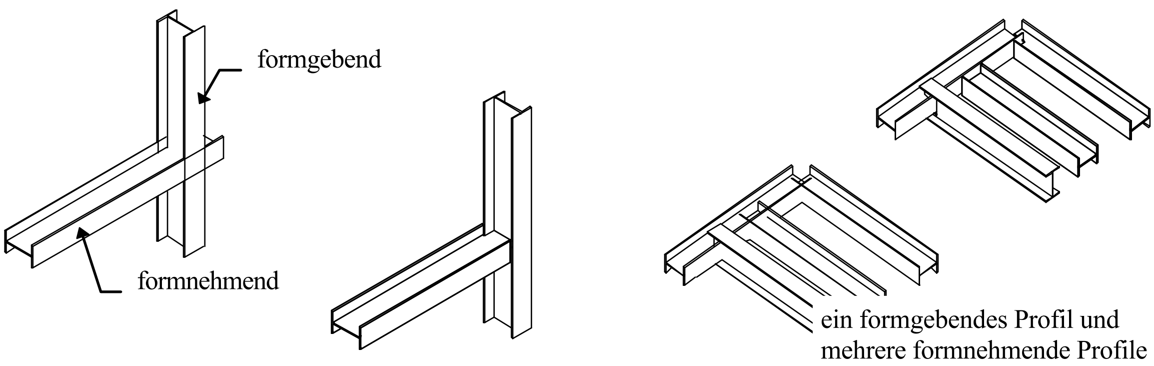


Fig. 4. Ausklinkungen von I-Profilen

6 Literaturverzeichnis

[1] Armstrong, M.A. : Basic Topology. Springer Verlag, New York, 1983

[2] Dubrovin, B. A., Fomenko, A. T., Novikov, S. P. : Modern Geometry - Methods and Applications Part II. The Geometry and Topology of manifolds; Springer Verlag, NewYork, 1985

[3] Eshete,T., Werner, F., Wüthrich, C.A. : Checking Boundary Non-Manifoldness of Solid Objects for Steel Construction. *The Fourth Inter. Conf in Central Europe on.Computer Graphics and Visualization´96 (WSCG´96),*Plzen,Czech, PP. 388-398

[4] Eshete,T. : Grundlagen zur Methodik der Verschneidung stahlbautypischer Körper in einem CAD-System. Diss. BUW, 1996.

[5] Kowalski, O. : Elemente der Analysis auf Mannigfaltigkeiten. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1981

[6] Mäntylä, M. : An introduction to solid modeling. Computer Science Press, Maryland, 1988

[7] Requcha, A. A. G., Voelcker, H. B. : Boolen Operations in Solid Modeling: Boundary Evaluation and Merging Algorithms. *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 73, No 1, January 1985, pp. 30-44

[8] Takala, T. : A Taxonomy on Geometric and Topology Models. *In Computergraphics and Mathematics*, Falcidiano, B. Hermann, I., Pienovi, C. (eds), Springer Verlag, Berlin, 1992, pp. 151-171